Ростовский-на-Дону государственный колледж
радиоэлектроники, информационных и промышленных технологий

Горбенко Н.Н.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине **«Математика»**

Тема: «Линейная алгебра»

для студентов 2 курса

специальностей:
080110 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
032002 «Документационное обеспечение управления и архивоведение»

ББК 22.1
Г-67

Рекомендовано к изданию Методическим советом РГ КРИПТ

Рецензенты: **Гайдай Е.В.** – председатель городского методического объединения, преподаватель математики
Алексеев В.В. – преподаватель математики РГКРИПТ

Линейная алгебра: методическое пособие по дисциплине «Математика» для студентов 2 курса очного отделения / сост.: Горбенко Н.Н. – Ростов-на-Дону: РГ КРИПТ, 2009. – 36 с.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с требованиями ГОС СПО по специальностям «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» и «Документационное обеспечение управления и архивоведение».

В учебное пособие вошли теоретические вопросы дисциплины «Математика», а так же рассмотрены на примерах типовые практические задания, даны примеры для самостоятельного решения.

Учебное пособие носит практический характер и может быть использовано как на занятиях, так и во время внеаудиторной подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Тема 1. Матрицы 5
§ 1. Определение матрицы 5
§ 2. Виды матриц 5
§ 3. Равенство матриц 6
§ 4. Транспонированная матрица 7
§ 5. Линейные операции над матрицами 7
§ 6. Умножение матрицы на число 8
§ 7. Умножение матрицы на матрицу 9
Задания для самостоятельной работы 12
Тема 2. Определители 15
§ 1. Определители второго порядка 15
§ 2. Определители третьего порядка 15
§ 3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя 17
Задания для самостоятельной работы 18
Тема 3. Обратная матрица 19
§ 1. Определение обратной матрицы 19
§ 2. Нахождение обратных матриц второго и третьего порядков 19
Задания для самостоятельной работы 22
Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений с тремя неизвестными 23
§ 1. Основные понятия 23
§ 2. Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений 23
§ 3. Теорема Крамера 23
§ 4. Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений 25
Задания для самостоятельной работы 26
§ 5. Простейшие матричные уравнения и их решения 27
Задания для самостоятельной работы 30
§ 6. Метод Гаусса 31
Задания для самостоятельной работы 34
Список литературы 35

Введение

Настоящее учебное пособие содержит систематизированное изложение курса «Математика» и составлено в соответствии с требованиями ГОС СПО по специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)».

В современных условиях организации учебного процесса, когда значительную часть учебного времени занимает самостоятельная работа, задачи её планирования становятся все более актуальными. Для эффективной организации самостоятельной работы студентов и было разработано данное учебное пособие.

В пособии рассмотрены темы курса «Линейная алгебра». Подробно вводится понятие матрицы, рассматриваются определители второго и третьего порядка, методы решения систем линейных уравнений.

Результатом изучения предлагаемых тем формируется умение решать системы линейных уравнений с тремя неизвестными различными способами: методом Гаусса, по формулам Крамера, матричным способом.

В учебное пособие вошли теоретические вопросы дисциплины «Математика», а так же рассмотрены на примерах типовые практические задания, даны примеры для самостоятельного решения.

Учебное пособие носит практический характер и может быть использовано как на занятиях, так и во время внеаудиторной подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Математика».

Тема 1. Матрицы

§ 1. Определение матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Любое число такого массива называется ***элементом*** матрицы.

Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально, называется ***строкой*** матрицы, а вертикально – ***столбцом***.

Количество строк в матрице обычно обозначается $\boldsymbol{m}$, количество столбцов – $\boldsymbol{n}$.

Количество элементов в матрице называется размерностью матрицы и обозначается $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$.

Матрицу обычно обозначают большой буквой A.

Ее элементы обозначаются той же, но маленькой буквой с индексами: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца, в котором стоит элемент a, причем $i = 1, 2,\ldots m$, $j = 1,2,\ldots n$.

§ 2. Виды матриц

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется ***прямоугольной***. Таковы, например, матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{pmatrix}.$$

Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется ***квадратной***. Например, квадратными являются матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}.$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее ***порядком***. Так, в последнем примере порядок матрицы А равен 2, а порядок матрицы В равен 4.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ, содержащую элементы а$_{11}$, а$_{22}$, …, а$_{nn}$, будем называть ***главной***, а диагональ, содержащую элементы а$_{1n}$, а$_{2,n-1}$, …, а$_{1n}$, – ***побочной*** (или вспомогательной).

Среди квадратных матриц выделим матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются ***диагональными;*** например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

являются диагональными матрицами второго и четвертого порядка.

Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, т.е. а$_{11}$ = а$_{22}$ =…= а$_{nn}$, то такая диагональная матрица называется ***скалярной***.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется ***единичной*** и обозначается буквой Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** и обозначается так:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Равенство матриц

Две матрицы называются ***равными***, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны: а$_{ij}$ = b$_{ij}$.

Так, матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны, если а$_{11}$ = b$_{11}$, а$_{12}$ = = b$_{12}$, а$_{13}$ = b$_{13}$, а$_{21}$ = b$_{21}$, а$_{22}$ = b$_{22}$, а$_{23}$ = b$_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа $m \times n$, либо квадратные одного и того же порядка n.

§ 4. Транспонированная матрица

Операция транспонирования матрицы заключается в перемене мест столбцов и строк исходной матрицы. В результате получается транспонированная матрица.

$$A \to A^T \qquad a_{ij} \to a_{ji}$$

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

§ 5. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B условимся называть такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа m×n, или квадратные порядка n.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц C = A + B имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

где $c_{11} = a_{11} + b_{11}, c_{12} = a_{12} + b_{12}; \dots c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \dots, c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$.

Получаем в результате – матрица C имеет ту же размерность m×n.

Пример 1. Сложить матрицы A и B, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение. $C = A + B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 8 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 16\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 10 & 0\end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\\ 0 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

Решение.

а) Здесь А и В – квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2-1 & 4+3\\ -1+1 & 3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

б) Здесь А и В – прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1+2 & 2-4 & -3+1\\ 2+3 & -4+0 & 5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}.$$

в) Здесь А и В – квадратные матрицы третьего порядка. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2-5 & 1+3 & 3+16\\ 0 & 0 & 0\\ -1+7 & 3+10 & 8+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 19\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 13 & 8\end{pmatrix}.$$

г) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как А есть матрица типа 3×2, а В – матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

Мы видим, что сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами.

Из сказанного выше вытекает равенство: **А + О = А,** т. е. существует такая нулевая матрица (того же порядка или типа), сумма которой с матрицей А любого типа равна матрице А.

Для любой матрицы А существует матрица **– А**, такая, что А+(-А) = О, т. е. матрица, ***противоположная*** **А**.

§ 6. Умножение матрицы на число

Матрицу можно умножить на число, для этого надо на это число умножить каждый элемент матрицы.

Пример 1. Умножить матрицу А на число 2.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы А на 2, получим:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad C = A \cdot 2 = \begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 10 & 8 & 12\end{pmatrix}$$

Пример 2. Умножить матрицу А = $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ на число κ = 3.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы А на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Пример 3***.** Найти матрицу, противоположную матрице А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу А на κ = -1:

$$-A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти линейную комбинацию 3А-2В, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала находим произведения А на κ_1 = 3 и В на κ_2 = -2:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}, \quad -2B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

§ 7. Умножение матрицы на матрицу

Матрицу можно умножить на матрицу.

Умножая первую строку первой матрицы на первый, второй и т. д. столбцы второй матрицы, получим в виде суммы произведений первый, второй и т. д. элементы первой строки новой матрицы.

Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)_{1\times 3}$ – вектор-строка; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$ – вектор-столбец, тогда

$$C = A \times B = (a_1, a_2, a_3)\cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i .$$

Аналогичная операция производится с каждой строкой первой матрицы.

Таким образом, произведением двух матриц – матрицы A(m×n) на матрицу B(n×p), является матрица, каждый элемент которой C_{ij} вычисляется по формуле:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, \ldots m, \ \ j = 1, \ldots p$$

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$

Произведением этих матриц является матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т. е. b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$.

Чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$.

Аналогично находят элементы c_{21} и c_{22}.

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения, нужно все элементы i-й строки ($a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$) матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца ($b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}$) матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример 1. Найти произведение матриц A и B, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Найдем каждый элемент матрицы-произведения:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6;$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2;$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1;$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6;$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1;$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1;$$
$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8;$$
$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1;$$
$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.

Пример 2. Найти матрицу C = A × B, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$.

Решение.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot1+2\cdot1+1\cdot4 & 3\cdot3+2\cdot1+1\cdot0 & 3\cdot0+2\cdot3+1\cdot0 \\ 4\cdot1+0\cdot1+2\cdot4 & 4\cdot3+0\cdot1+2\cdot0 & 4\cdot0+0\cdot3+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 6 \\ 12 & 12 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}.$$

Пример 3. Найти произведение AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1\div(-1)\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере мы попытаемся найти произведение BA, то убедимся, что это невозможно.

Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько в первой матрице, и столько столбцов, сколько во второй матрице.

Отметим следующий любопытный факт. Известно, что произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это не всегда справедливо, т.е. возможен случай, когда произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1 \\ 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти транспонированную матрицу для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Сложить матрицы A и B:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить линейные комбинации матриц:

а) 2A – B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

б) 3A + 2B, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$;

в) 2A + 3B – C, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти произведение AB:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить $C = A^2 + 2B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Найти AB – BA,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти 3A 2B,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти AE,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Найти EA,

если $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти сумму матриц:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $C = A + B = ?$

12. Найти разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = A - B = ?$$

13. Умножить матрицу на число:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = 2 \cdot A = ?$$

14. Умножить вектор-строку на вектор-столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = A \cdot B = ?$$

15. Умножить матрицу на матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Тема 2. Определители

§ 1. Определители второго порядка

Определителем (или ***детерминантом***) ***второго порядка*** называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Диагональ, содержащая элементы, $a_{11}a_{22}$, называется ***главной***, а диагональ, содержащая элементы $a_{12}\,a_{21}$ – ***побочной*** (или вспомогательной).

Определитель второго порядка вычисляется по правилу: **из произведения элементов главной диагонали вычитают произведение элементов побочной диагонали.**

Пример. Вычислить определитель второго порядка**:**

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

2. $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 42 = -56$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$

§ 2. Определители третьего порядка

Определителем (или ***детерминантом***) ***третьего порядка*** называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ иначе обозначается det A, или D.

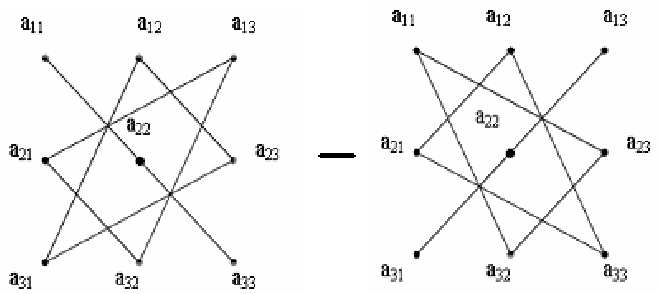
Определитель третьего порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{33}\,a_{12} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Сарруса).

Это правило проиллюстрируем на схеме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11}a_{22}a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}a_{21}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$).

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка.

I способ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 0.$$

II способ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 = 0.$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3{\cdot}5{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}3 + 2{\cdot}4{\cdot}1 - 1{\cdot}5{\cdot}3 - 2{\cdot}2{\cdot}3 - 3{\cdot}3{\cdot}4 = 45 + 18 + 8 - 15 - 12 - 36 = 71 - 63 = 8.$$

Пример 3. Вычислить определитель третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bca + cba - c{\cdot}c{\cdot}c - b{\cdot}b{\cdot}b - a{\cdot}a{\cdot}a = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

§ 3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе *n*-го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Пример 1. Записать миноры определителя:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Миноры

$$\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 4 = 18,$$

$$\mathrm{M}_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 0 = 1,$$

$$\mathrm{M}_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 + 2\cdot 5 = 6.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Пример 2. Найти алгебраические дополнения.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4,$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(10-6) = -4,$$

$$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+a & a-a \\ a-a & a+a \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

г) $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$.

3. Найти алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

Тема 3. Обратная матрица

§ 1. Определение обратной матрицы

Квадратная матрица A называется ***вырожденной***, если ее определитель равен нулю, и ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю.

Если A – квадратная матрица, то ***обратной*** по отношению к A называется матрица, которая, будучи умноженной на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

Обозначив обратную матрицу через A^{-1}, запишем:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется ***обратимой***. Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется ***обращением*** матрицы. Нахождение обратной матрицы имеет большое значение при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

▲ **Теорема.** *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т. е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

При условии $D = |A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}/D & A_{21}/D & \dots & A_{n1}/D \\ A_{12}/D & A_{22}/D & \dots & A_{n2}/D \\ A_{1n}/D & A_{2n}/D & \dots & A_{nn}/D \end{vmatrix}.$$

§ 2. Нахождение обратных матриц второго и третьего порядков

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы A.
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).
4. Умножают полученную матрицу на 1/D.

Пример 1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Находим определитель матрицы A:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3-(-1)\times4 = 6+4 = 10.$$

Так как D ≠ 0, то данная матрица является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица.

2. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 3 = 3,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 4 = -4,\ A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot(-1) = 1,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 2 = 2\,.$$

Тогда получим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируем эту матрицу: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Умножим полученную матрицу на 1/D, т.е. на $1/10$:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Выполнив умножение AA^{-1}, находим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{3}{10} + (-1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 2\cdot\frac{1}{10} + (-1)\cdot\frac{1}{5} \\ 4\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 4\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Проверка показала, что обратная матрица найдена верно.

Пример 2. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Находим определитель матрицы А:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 7 - 1\cdot 2\cdot 0 = -7 + 12 + 9 = 14\,.$$

Поскольку D ≠ 0, матрица А является невырожденной и, значит, можно найти матрицу A^{-1}.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

Запишем новую матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & 6 & 3\\ -14 & -2 & 6\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

4. Умножив полученную матрицу на $1/D = 1/14$, находим

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/14 & -14/14 & 7/14\\ 6/14 & -2/14 & -2/14\\ 3/14 & 6/14 & -1/14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Имеем:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Последовательно находим:

$$C_{11}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{3}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1;$$

$$C_{12}=1\cdot(-1)+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\frac{3}{7}=-1+\frac{7}{7}=-1+1=0;$$

$$C_{13}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{2}-\frac{7}{14}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0;$$

$$C_{21}=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{3}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=0;$$

$$C_{22}=0\cdot(-1)+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+2\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=\frac{7}{7}=1;$$

$$C_{23} = 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 0;$$

$$C_{31} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{3}{7} + 7 \cdot \frac{3}{14} = -\frac{3}{2} + \frac{21}{14} = 0;$$

$$C_{32} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 7 \cdot \frac{3}{7} = -3 + 3 = 0;$$

$$C_{33} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 7 \cdot \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Следовательно, $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/7 & -1/7 & -1/7 \\ 3/14 & 3/7 & -1/14 \end{pmatrix}.$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Найти матрицы, обратные заданной матрице А:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений с тремя неизвестными

§ 1. Основные понятия

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots$ – коэффициенты при неизвестных;

$x_1, x_2\ \ldots$ – неизвестные переменные;

$b_1, b_2\ \ldots$ – свободные члены.

Если все $b_i = 0$, то система называется ***однородной***.

Система, имеющая решение, называется ***совместной***.

Если система имеет одно решение, она называется ***определенной***.

Две системы, имеющие одинаковые решения, называются ***эквивалентными***.

§ 2. Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений

1. Уравнения можно менять местами.
2. Можно обе части любого уравнения умножить или разделить на одно и то же число $k \neq 0$.
3. Можно к одному из уравнений прибавить или вычесть из него другое уравнение.
4. Можно вычеркнуть уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю.

§ 3. Теорема Крамера

▲ **Теорема.** *Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.*

Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A, а из свободных членов – матрицу-столбец B, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A обозначим Δ и назовем ***определителем системы***. Таким образом,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при x_1, x_2, ..., x_n на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Тогда формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \qquad x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta},$$

или короче

$$x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю. Здесь возможны два варианта:

1. $\Delta = 0$ и каждый определитель $\Delta_{xi} = 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных x_i пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k. Очевидно, что при этом система имеет бесчисленное множество решений.

2. $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_{xi} \neq 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_i, пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решений.

§ 4. Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений

Рассмотрим применение формул Крамера к решению систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y=12, \\ 2x-y=7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-11; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=-33; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=11.$$

Найдем значения *x* и *y* по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-33}{-11}=3; \quad y=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{11}{-11}=-1.$$

Итак, решение системы есть (3; - 1).

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 6x-4y=11. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определитель Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=0; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}=2; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}=1.$$

Так как $\Delta=0$, а $\Delta_x\neq 0$ и $\Delta_y\neq 0$, то система не имеет решений (уравнения противоречивы).

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y=11, \\ 6x-9y=33. \end{cases}$$

Решение. Находим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}=0; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 33 & -9 \end{vmatrix}=0; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 33 \end{vmatrix}=0.$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны).

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=3, \\ 5x-2y-2z=3, \\ x+y-z=-2. \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2(-3)+1\cdot 7=25;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2(-7)+1\cdot(-1)=25;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3(-7)-3(-3)+1\cdot(-13)=-25;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot(-13)+3\cdot 7=50.$$

Найдем значения x, y, z по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{25}{25}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-25}{25}=-1;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{50}{25}=2.$$

Итак, получаем ответ: $(1;\ -1;\ 2)$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Решить по формулам Крамера следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-5y=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y=6z=-7, \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7, \\ x+4y+2z=-1, \\ x-4y=-5. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-7y+z=-4, \\ 3x+y-z=17, \\ x-y+3z=3. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20, \\ x+3y+2z+t=11, \\ 2x+10y+9z+9t=40, \\ 3x+8y+9z+2t=37. \end{cases}$

§ 5. Простейшие матричные уравнения и их решение

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ или } \mathrm{AX} = \mathrm{B}.$$

Это равенство называется простейшим матричным уравнением.

Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A – невырожденная ($D \neq 0$); тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части матричного уравнения, имеем

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B.$$

Используя сочетательный закон умножения, перепишем это равенство в виде:

$$A^{-1}(A)X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, находим

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1. Найти обратную матрицу A^{-1}.
2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1} \cdot B$.
3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример 1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Найдем определитель матрицы А:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матриц А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

Запишем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Учитывая, что $\frac{1}{D} = -\frac{1}{2}$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Умножим матрицу A^{-1} на матрицу В:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 17 \\ \frac{3}{2} \cdot 7 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Так как $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, то, по определению равных матриц, получим $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Пример 2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим определитель матрицы А:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) \cdot 4 =$$

$= 12 - 2 + 3 = 5 \neq 0.$

Запишем все алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 4; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Запишем новую матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Учитывая, что $\frac{1}{D} = \frac{1}{5}$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. Имеем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 0 + (-\frac{1}{5}) \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + \frac{12}{5} \cdot 0 + (-\frac{3}{5}) \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Пример 3. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. Составим матричное уравнение АХ = В, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix},$$

и решим его указанным способом. Находим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0;$$

$A_{11} = 3;\ A_{12} = -6;\ A_{13} = 3;\ A_{21} = -4;\ A_{22} = 2;\ A_{23} = -1;\ A_{31} = 2;\ A_{32} = -1;\ A_{33} = -4$

Составим матрицу: $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Итак, решение системы уравнений есть $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричным способом системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

§ 6. Метод Гаусса
(метод исключения неизвестных)

▲ **Теорема 1.** *При элементарных преобразованиях (ЭП) система линейных уравнений переходит в равносильную.*

Определение: Система линейных уравнений называется ***линейной системой канонического вида***, если в каждом ее уравнении найдется неизвестное, коэффициент при котором равен единице и которое отсутствует во всех других уравнениях системы.

▲ **Теорема 2.** *Любую совместную систему линейных уравнений с помощью элементарных преобразований можно привести к каноническому виду.*

На использовании этих теорем основан метод Гаусса, суть которого состоит в том, что с помощью элементарных преобразований исходную линейную систему приводят либо к системе, содержащей противоречивое уравнение $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n = C$, (где $C \neq 0$) и, следовательно, несовместной (из чего по теореме 1 следует и несовместимость исходной системы), либо (в случае совместимости) к системе канонического вида (теорема 2), которая имеет то же множество решений, что и исходная система. Исследование же и решение системы канонического вида не составляет труда.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

*Пример 1***.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

1) Ведущей строкой возьмем строку C_1 (первую). Ведущим элементом выберем элемент $a_{11} = 1$, и в его столбце при помощи элементарных преобразований строк все остальные элементы обратим в нуль. (Заметим, что в качестве ведущего можно брать любой отличный от нуля, кроме свободного члена, элемент ведущей строки.) Для этого ко второй строке прибавим удвоенную первую. Это преобразование можно написать так: $C_2 = C_2 + 2C_1$. Здесь C_1,

C_2 – вектор строки, а равенство нужно понимать так, что C_2 меняется в соответствии с указанным элементарным преобразованием. А к третьей строке прибавим утроенную первую, т. е. $C_3 = C_3 + 3C_1$. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

2) Вторую строку вычеркнем, а ведущей возьмем третью строку. Ведущим элементом выберем $a_{32} = -1$.

ЭП будут следующие: $C_1 = C_1 - C_3$. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

3) Умножив теперь третью строку на –1, будем иметь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Коротко эти преобразования будем оформлять так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3 = c_3 + 3c_1]{C_2 = C_2 + 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 = C_1 - C_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = -C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Полученная матрица и есть расширенная матрица системы канонического вида. Выпишем эту систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2 – базисные, переменная x_3 – свободная. Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 1 \\ x_2 = 5x_3 - 1 \end{cases}$$

Придавая свободным переменным различные числовые значения, будем получать различные частные решения.

*Пример 2***.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -x - 2x_2 + 2x_3 = 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы. Затем с помощью элементарных преобразований приведем ее к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 14 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3=c_3-2c_1]{C_2=C_2+2C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3=\frac{1}{3}c_3]{C_2=\frac{1}{3}C_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1=C_1-2C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1=C_1+C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Выпишем систему канонического вида:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Здесь свободные неизвестные отсутствуют. Число неизвестных равно числу уравнений. Система имеет единственное решение: (2, -3, 5).

*Пример 3***.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3=c_3-2c_1]{C_2=C_2+2C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Соответствующая этой матрице система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 - x_3 = 7 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Так как она несовместна (противоречиво последнее уравнение), то исходная система также несовместна.

Подводя итог сказанному, перечислим последовательность действий при решении системы линейных уравнений методом Гаусса:

1. Составить расширенную матрицу системы.
2. Выбрать ведущую строку, а в ней отличный от нуля ведущий элемент.

3. В столбце ведущего элемента с помощью элементарных преобразований строк все остальные элементы обратить в нуль.

4. Если в полученной матрице появилась строка $(0\ 0\ \ldots 0|C)$, где $C \neq 0$, преобразование прекратить, так как исходная система несовместна. Если такой строки не появилось, вычеркнуть строки, все элементы которых равны нулю. Затем снова выбрать ведущую строку среди строк, которые еще не были ведущими, а в ней – ведущий элемент, и повторить п.п. 3 и 4.

5. В случае совместной системы каждая строка должна побывать ведущей. После этого каждую строку нужно разделить на соответствующий элемент.

Таким образом будет получена расширенная матрица линейной системы канонического вида (или установлена несовместимость системы). По этой матрице нужно записать соответствующую систему канонического вида.

Затем оставить в левой части неизвестные, которые были ведущими (это базисные неизвестные), а остальные (свободные) перенести в правую часть. Полученные формулы и будут общим решением системы (пример 1). Если свободные неизвестные отсутствуют (т.е. число уравнений системы канонического вида равно числу неизвестных), система имеет единственное решение (пример 2).

Примечание. Если в исходной системе число уравнений меньше числа неизвестных, то сразу можно сказать, что в случае совместности она будет неопределенной (так как число уравнений в соответствующей системе канонического вида будет, безусловно, меньше числа неизвестных).

Задания для самостоятельной работы

1. Решить методом Гаусса следующие системы уравнений

а) $\begin{cases} 5x-5y-4z=-3, \\ x-y-5z=11, \\ 4x-3y-6z=-9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4y-2z=0, \\ 3x-5y-6z=-21, \\ 3x+y+z=-4. \end{cases}$

2. Найти решения систем линейных уравнений методом Гаусса, по формуле Крамера и методом обратной матрицы, полученные результаты сравнить:

а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2=11, \\ 5x_2+6x_3=28, \\ 2x_3=7. \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=\text{-}5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=5, \\ x_3=2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+4x_3=2, \\ -x_1+x_2-2x_3=\text{-}1, \\ 3x_2+x_3=1. \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=0, \\ x_3=1. \end{cases}$

Список литературы

1. **Филимонова Е.В.** Математика. – Ростов на/Д: «Феникс», 2005.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие/ под ред. проф. Ермакова В.И. – М.: ИНФРА-М, 2002.
3. Математика: учебник для экономистов,10-11 класс. – М.: «Сантакс-пресс», 1996.
4. **Соловейчик И.А., Лисичкин В.Т.** Математика для техникумов. – М.: «ОНИКС 21 век», «Мир и образование», 2003.

Учебное издание

Горбенко Н.Н.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине **«Математика»**

Тема: «Линейная алгебра»

2 курс

Формат 60х84 1/8. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 4,18. Тираж 100 экз.

Ростовский-на-Дону государственный колледж радиоэлектроники,
информационных и промышленных технологий
344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Красноармейская, 11

Отпечатано: Ростовский-на-Дону государственный колледж радиоэлектроники,
информационных и промышленных технологий